1

فصل ۸

بخش ۱ فصل ۸

۱. درهر مورد طول خم داده شده را محاسبه کنید.

الف) طول خم $y^۲=x^۳$ به ازای $۰\le y\le ۱$؛

ب) طول خم $y=x^۲$ به ازای $۰\le x\le ۱$؛

پ) طول خم $y=\ln x$ به ازای $۱\le x\le e$؛

ت) (در مختصات قطبی) مارپیچ $r=k\theta$ به ازای $۰\le\theta\le ۲\pi$، که در آن $k>۰$؛

ث) چرخ زاد ($x=a(t-\sin t)$ ، $y=a(1-\cos t)$) به ازای $۰\le t\le ۲\pi$، که در آن $a>۰$ (برای تعریف چرخ زاد تمرین ۱۶ بخش ۳.۳ را ببینید).

حل: الف) پیمایش $\gamma(t)=(t,t^{۳/۲})$ به ازای $t\in[۰,۱]$ را در نظر بگیرید. بنابراین طول خم برابر است با

$$\int_۰^۱ \sqrt{۱^۲+(\tfrac{۳}{۲}\sqrt{t})^۲}\,dt = \int_۰^۱ \sqrt{۱+\tfrac{۹t}{۴}}\,dt$$

$$= \frac{۸}{۲۷}\left(۱+\frac{۹t}{۴}\right)^{۳/۲}\Big|_۰^۱ = \frac{۱۳\sqrt{۱۳}-۸}{۲۷}$$

ب) پیرامون $\gamma(t)=(t,t^2)$ برای $t\in[0,1]$ از خم را در نظر بگیرید. بنابراین طول خم برابر است با

$$\int_0^1 \sqrt{1+(2t)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_0^{\sinh^{-1}2} \frac{(\cosh u)^2}{2}\,du$$

که برای به دست آمدن برابری آخر از تغییر متغیر $\sinh u = 2t$ استفاده کردیم. اگر قرار دهیم $\alpha = \sinh^{-1} 2$ داریم که طول خم برابر است با

$$\int_0^\alpha \frac{(\cosh u)^2}{2}\,du = \int_0^\alpha \frac{\cosh 2u - 1}{4}\,du = \left(\frac{\sinh 2u}{8} - \frac{u}{4}\right)_0^\alpha$$

$$= \left(\frac{2\sinh u.\cosh u}{8} - \frac{u}{4}\right)_0^\alpha$$

$$= \frac{2\times 2\times\sqrt{1+2^2}}{8} - \frac{\alpha}{4}.$$

اما می‌توان α را با استفاده از رابطهٔ $\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = 2$ حساب کرد که در این صورت داریم

$$e^{2\alpha} - 4e^\alpha - 1 = 0 \Rightarrow e^\alpha = 2 \pm \sqrt{4+1} \Rightarrow \alpha = \ln(2+\sqrt{5}).$$

بنابراین طول خم برابر است با

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}.$$

پ) پیرامون $\gamma(t) = (t, \ln t)$ را برای $t\in[1,e]$ در نظر بگیرید. بنابراین با استفاده از تغییر متغیر $\sinh u = \frac{1}{t}$ داریم که طول خم برابر است با

$$\int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt = \int_{\sinh^{-1}1}^{\sinh^{-1}\frac{1}{e}} \cosh u \times \frac{-\cosh u}{\sinh^2 u}\,du = \int_{\sinh^{-1}1}^{\sinh^{-1}\frac{1}{e}} -\operatorname{cotgh}^2 u\,du.$$

با توجه به رابطهٔ

$$\frac{d\operatorname{cotgh} u}{du} = 1 - \operatorname{cotgh}^2 u$$

به دست می‌آید که طول خم برابر است با

$$\left(-u+\operatorname{cotgh}u\right)\Big|_{\sinh^{-1}1}^{\sinh^{-1}\frac{1}{e}}=-\sinh^{-1}\frac{1}{e}+\sinh^{-1}1+\frac{\sqrt{1+\frac{1}{e^{2}}}}{1/e}-\frac{\sqrt{1+1}}{1}$$

که برای به دست آوردن رابطه‌ی بالا از $\operatorname{cotgh}u=\frac{\sqrt{1+\sinh^{2}u}}{\sinh u}$ استفاده کردیم. با توجه به این که

$$\sinh^{-1}\alpha=\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^{2}+1}\right)$$

به دست می‌آید که طول خم برابر است با

$$-\ln\left(\frac{1}{e}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{e}\right)^{2}+1}\right)+\ln\left(1+\sqrt{1^{2}+1}\right)+\sqrt{e^{2}+1}-\sqrt{2}$$
$$=1-\ln\left(1+\sqrt{e^{2}+1}\right)+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{e^{2}+1}-\sqrt{2}.$$

ت) پرمایش $\gamma(t)=(kt,\ t)$ برای $t\in[0,2\pi]$ را در مختصات قطبی درنظر بگیرید. این خم در مختصات دکارتی برابر است با

$$\gamma(t)=(kt\cos t,\ kt\sin t).$$

بنابراین طول خم برابر است با

$$\int_{0}^{2\pi}\sqrt{(k\cos t-kt\sin t)^{2}+(k\sin t+kt\cos t)^{2}}\ dt=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{k^{2}+k^{2}t^{2}}\ dt.$$

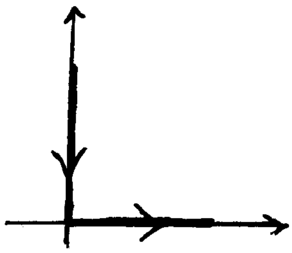
بنابراین با استفاده از تغییر متغیر $\sinh u=t$ به دست می‌آید که طول خم برابر است با

$$k\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+t^{2}}\ dt=k\int_{0}^{\sinh^{-1}2\pi}\cosh^{2}u\ du$$
$$=k\left(\frac{\sinh u\cosh u}{2}+\frac{u}{2}\right)\Big|_{0}^{\sinh^{-1}2\pi}$$
$$=k\left(\frac{2\pi\sqrt{1+4\pi^{2}}}{2}+\frac{\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^{2}+1}\right)}{2}\right)$$
$$=k\pi\sqrt{1+4\pi^{2}}+\frac{k\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^{2}+1}\right)}{2}.$$

ث) با استفاده از پرمایش صورت سوال برحسب t به دست می‌آید که طول خم برابر است با

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a\sin t)^2}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t-2\cos t+\sin^2 t}\,dt$$
$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt$$
$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$
$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(2\sin^2\tfrac{t}{2})}\,dt$$
$$= 2a\int_0^{2\pi}\sin\tfrac{t}{2}\,dt$$
$$= -4a\cos\tfrac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}$$
$$= 8a$$

۲. عدد طبیعی $n \geq 1$ داده شده است. خمی n بار مشتق‌پذیر با مشتق nام پیوسته $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ مثال بزنید که تصویر آن اجتماع نیم‌های مثبت محور x و y باشد (شکل را ببینید).



حل: $x(t)$ و $y(t)$ را مشابه زیر تعریف کنید

$$x(t)=\begin{cases}0 & t\leq 0\\ t^{n+1} & t>0\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}(-t)^{n+1} & t\leq 0\\ 0 & t>0\end{cases}$$

واضح است که خم $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ n بار مشتق‌پذیر است و مشتق nام آن هم پیوسته است.

همچنین این نکته که تصویر آن مجموعهٔ خواسته شده است نیز واضح است.

۳. برای هر یک از خم های زیر پرمایشی برحسب طول ارائه کنید:

الف) دایره‌ای به شعاع $R>0$ و مرکز (x_0,y_0) که یک بار کامل در جهت مثلثاتی پیموده شده است.

ب) چرخ زاد (تمرین ۱ (ث))، یک کمان کامل.

حل: الف) واضح است که $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ

$$\gamma(t)=(x_0+R\cos t,\, y_0+R\sin t)$$

پرمایشی از خم خواسته شده است. قرار دهید $t_0=0$. بنابراین

$$l(t)=\int_0^t\sqrt{R^2\sin^2 s+R^2\cos^2 s}\,ds=Rt.$$

پس وارون تابع l عبارت است از

$$\alpha(s)=\frac{s}{R}=t.$$

در نتیجه پرمایش برحسب طول خم مطلوب عبارت است $\tilde{\gamma}:[0,2\pi R]\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ

$$\tilde{\gamma}(s)=\left(x_0+R\cos\frac{s}{R},\, y_0+R\sin\frac{s}{R}\right).$$

ب) با توجه به حل قسمت (ث) تمرین ۱ با پرمایش درنظر گرفته شده داریم

$$l(t)=-4a\cos\frac{s}{2}\Big|_0^t=4a-4a\cos\frac{t}{2}$$

و در نتیجه تابع وارون l برابر است با $\alpha(s):[0,8a]\to[0,2\pi]$ با ضابطهٔ

$$\alpha(s)=2\cos^{-1}\frac{4a-s}{4a}=t.$$

بنابراین پرمایش برحسب طول چرخ زاد عبارت است از $\gamma : [0, 8a] \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ

$$\gamma(s) = \left(a\left(2\cos^{-1}\frac{4a-s}{4a} - 2\,\frac{4a-s}{4a}\sqrt{1-\left(\frac{4a-s}{4a}\right)^2}\right), \frac{8as-s^2}{8a} \right).$$

که برای به دست آوردن این رابطه از رابطهٔ سینوس و کسینوس دو برابر زاویه استفاده کرده‌ایم.

۴. خم پارامتری زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

نشان دهید این خم هموار است که دقیقاً یک بار خودش را قطع می‌کند. تصویر خم را رسم کنید.

حل: فرض کنید که به ازای $t=t_1$ و $t=t_2$ که در آن $t_1 \neq t_2$ باشد، خم از یک نقطه بگذرد. بنابراین

$$t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1 \Rightarrow t_1 = \pm t_2 \xRightarrow{t_1 \neq t_2} t_1 = -t_2 .$$

اما

$$t_1^3 - t_1 = t_2^3 - t_2 \Rightarrow -t_2^3 + t_2 = t_2^3 - t_2 \Rightarrow t_2^3 - t_2 = 0 .$$

بنابراین t_2 می‌تواند برابر ۰، ۱ یا ۱- باشد. به ازای $t_2=0$ که $t_1=t_2$ و غیرقابل قبول است و با توجه به $t_1=-t_2$، $t_2=\pm 1$ نقطهٔ منحصر به فردی را نشان می‌دهد که خم دو بار از آن عبور می‌کند.

با توجه به ضابطهٔ خم مشخص است که x مقدار خود را در $[-1, \infty)$ می‌گیرد و y برحسب x برابر است با

$$y = t(t^2-1) = \pm\sqrt{x+1} \times x .$$

تصویر خم مطابق شکل زیر است.