SUBJECT:
DATA:
NUMBER:

فصل اول

خطا (Error)

تقریب: عدد a را تقریب عدد A می‌گوییم که در محاسبات جای آن استفاده می‌شود. approximation

$A \simeq a \qquad \pi \simeq 3.14 \qquad \sqrt{2} \simeq 1.4142$

خطای مطلق: $e(a) = |A-a|$ (absolute)

$e(3.14) = |\pi - 3.14|$

خطای مطلق حدی یا بیشینهٔ خطا یا کران خطا:

$e_a \geq e(a) = |A-a| \iff A = a \pm e_a$

هر عددی که از خطای مطلق کوچکتر نباشد

خطای نسبی:

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} \simeq \frac{|A-a|}{|a|} \leq \frac{e_a}{|a|}$$

منابع خطا:

1. خطای مدل: اختلاف مدل ریاضی با پدیدهٔ فیزیکی

2. خطای اندازه‌گیری: دقت محدود وسایل اندازه‌گیری

(برای مثال اگر خط کشی با درجه‌بندی 1 سانتی متری داشته باشیم: $L = 150 \pm \frac{1}{2}\ cm$)

$150 - \frac{1}{2} \leq L \leq 150 + \frac{1}{2}$

CASCO PREMIUM QUALITY NOTEBOOK
CamScanner

SUBJECT: MATLAB
DATA: { download.ut.ac.ir or octave
NUMBER:

3. خطای ذخیره سازی یا نمایش اعداد (خطای گرد کردن)

$\pi \simeq 3.141592$

- قاعدهٔ گرد کردن: 1- گرد کردن به نزدیک ترین عدد (خطای $\frac{1}{2}$ خطای دیگر روش‌ها دارد)

0.005 — 0.01 (قطع کردن) — 2- " به سمت صفر

5 — 0.01 ($+\infty$) به سمت بالا — 3- "

0.01 ($-\infty$) به سمت پایین — 4- "

(مثلاً اگر بخواهیم گذاری را به 2 رقم پس از اعشار گرد کنیم، سوپریم خطا:

- در واقع بیشینه (یا سوپریم) گرد کردن به n رقم اعشار در روش اول: $\frac{1}{2} \times 10^{-n}$

10 — در باقی روش‌ها: 10^{-n}

ادامهٔ 1

- از بین دو عدد نزدیک، فاصلهٔ برابر، به عددی گرد شود که رقم راست (n امین رقم اعشار) زوج شود.

$A = 1.555 \xrightarrow{\text{2 رقم اعشار}} 1.56$

15 $B = 0.005 \xrightarrow{"} \checkmark 0 \quad 0.01$

- تقسیم‌های میانی به 2 کمترین خطا حاصل شود.

4. خطای محاسبه توابع

20

الف) خطای جمع

$|A-a| \leq e_a \iff A = a \pm e_a$

$|B-b| \leq e_b \iff B = b \pm e_b$

25

SUBJECT:
DATA:
NUMBER:

$c = a + b$

$C = c \pm e_c$?

$C = A + B$

$a - e_a \leq A \leq a + e_a$

$b - e_a \leq B \leq b + e_a$

$\xrightarrow{+}$

$(a+b) - (e_a + e_b) \leq A + B \leq (a+b) + (e_a + e_b)$

$c - (e_a + e_b) \leq C \leq c + (e_a + e_b)$

$\Updownarrow$

$C = c \pm (e_a + e_b)$

$\rightarrow e_c = e_a + e_b$, $|C - c| \leq e_a + e_b$

خطای نسبی (ب

$C = A - B$

e_c ?

$c = a - b$

$\xrightarrow{\times 1}$ $a + e_a \geq A \geq a - e_a$

$\xrightarrow{\times(-1)}$ $-b + e_b \geq -B \geq -b - e_b$

$\xrightarrow{+}$

$(a-b) + (e_a + e_b) \geq A - B \geq (a-b) - (e_a + e_b)$

$c + (e_a + e_b) \geq C \geq c - (e_a + e_b)$

$\Leftrightarrow C = c \pm (e_a + e_b)$ $\quad e_c \leq e_a + e_b$

خطای نسبی (ج

$(A, B, a, b \geq a)$

$e_a \ll a$ $\quad e_b \ll b$, $c = ab$ $\quad C = AB$

$\xrightarrow{\times}$ $ab - ae_b - be_a + e_a e_b \leq AB \leq ab + ae_b + be_a + e_a e_b$

SUBJECT:
DATA:
NUMBER:

$c-(ae_b+be_a)+e_ae_b \le C \le c+(ae_b+be_a)+e_ae_b$

می‌توانیم بنویسیم $\Rightarrow c-(ae_b+be_a)-e_ae_b \le C \le c+(ae_b+be_a)+e_ae_b$

$\rightarrow |C-c| \le ae_b+be_a+e_ae_b$ $\qquad e_c = ae_b+be_a+e_ae_b$

قابل صرف‌نظر

Example: مجموع، تفاضل و ضرب اعداد π و $\sqrt{2}$ را حساب کنید بطوریکه هردو به 4 رقم اعشار گرد شده باشند.

$\pi = 3.1416 \pm e_a$

$\sqrt{2} = 1.4142 \pm e_b$ $\qquad$ و $\quad e_a = e_b = \frac{10^{-4}}{2}$

$\pi+\sqrt{2} = 4.5558 \pm (e_a+e_b) = 4.5558 \pm 0.0001$

$\pi-\sqrt{2} = 1.7274 \pm (e_a+e_b) = 1.7274 \pm 0.0001$

$\sqrt{2}\,\pi = (3.1416)(1.4142) \pm (ae_b+be_a) = 4.44285072 \pm (2.2779 \times 10^{-4})$

$\rightarrow 4.4429 \pm \left(\frac{1}{2}\times 10^{-4} + 2.2779\times 10^{-4}\right) \Rightarrow 2.7779\times 10^{-4} \simeq 0.0003$

تابع y معادله‌ی تابع با n متغیر $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\qquad A_1 = a_1 \pm e_1$

$\vdots$

$A_n = a_n \pm e_n$

$f(A_1, A_2, \dots, A_n) = f(a_1, \dots, a_n) \pm e_f$

SUBJECT:
DATA:
NUMBER:

$$e_f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} e_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} e_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} e_n$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\quad \vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Example: $I = mr^2$ $\quad m = 0.1 \pm 0.001$ $\quad r = 0.3 \pm 0.005$

روش اول:

$$e_I = \left|\frac{\partial f}{\partial m}\right| e_m + \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| e_r = |r^2| e_m + |2mr| e_r$$

$$= 0.09 \times 10^{-3} + (0.06)(0.005) = 0.00039$$

$$I = (0.1)(0.3)^2 \pm e_I = 0.009 \pm 0.0004$$

روش دوم: (لگاریتم)

$$d(\ln I = \ln m + 2 \ln r)$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{dm}{m} + 2\frac{dr}{r} \longrightarrow \left|\frac{dI}{I}\right| \leq \left|\frac{dm}{m}\right| + 2\left|\frac{dr}{r}\right|$$

$$\simeq \longrightarrow \frac{e_I}{|I|} \leq \frac{e_m}{|m|} + 2\frac{e_r}{|r|}$$

Truncation Error (T.E.) خطای برشی 5

خطای ناشی از در نظر گرفتن تعداد معدودی از جملات یک سری بی نهایت.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \longrightarrow \text{T.E.}$$