فصل اول   توابع دومتغیره

فصل دوم   توابع برداری

فصل سوم   انتگرال‌های دوگانه

فصل چهارم انتگرال‌های سه‌گانه

فصل پنجم انتگرال‌های منحنی الخط

فصل ششم انتگرال سطح

$$I=\int_{y=0}^{3}\int_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} y\,dx\,dy=\int_{y=0}^{3} y\,dy.x\Big|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}=\int_{y=0}^{3} 2y.\sqrt{9-y^2}\,dy=0-\left(-\frac{2}{3}\times 9\times 3\right)=2\times 9=18$$

یادآوری:

$$\int y.\sqrt{9-y^2}\,dy=\int y.t.\left(\frac{-t}{y}dt\right)=\int -t^2dt=-\frac{t^3}{3}=-\frac{1}{3}\left(9-y^2\right)\sqrt{9-y^2}$$

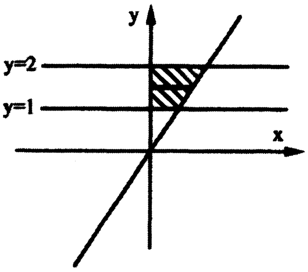
$$\boxed{\sqrt{9-y^2}=t\Rightarrow \frac{-y}{\sqrt{9-y^2}}dy=dt\Rightarrow dy=\frac{-t}{y}dt}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int\int_D \frac{dy\,dx}{x^2-y^2}$ که در آن D به صورت زیر تعریف شده است.

$$D:\{(x,y)\,|\,y\ge 2x; x\ge 0; 1\le y\le 2\}$$

حل:

ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



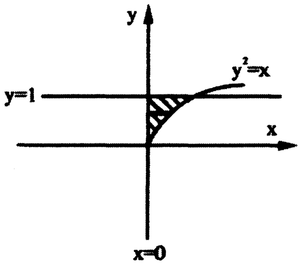
از آنجا که میدان D نسبت به متغیر y نامنظم و نسبت به متغیر x منظم است. ترتیب انتگرال‌گیری را نسبت به متغیر x را در اولویت قرار داده و می‌نویسیم:

$$I=\int_{y=1}^{2}\int_{x=0}^{\frac{y}{2}}\frac{dx\,dy}{x^2-y^2}=\int_1^2 dy.\frac{1}{2y}Ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{y}{2}}=\int_1^2\frac{dy}{2y}\left\{Ln\left|\frac{\frac{-y}{2}}{\frac{3y}{2}}\right|-Ln\left|\frac{-y}{y}\right|\right\}$$

$$=\int_1^2\frac{dy}{2y}\left(Ln\left(\frac{1}{3}\right)-Ln(1)\right)=\frac{1}{2}Ln\left(\frac{1}{3}\right).Lny\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left(Ln\frac{1}{3}\right).(Ln2)$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int\int_D e^{\frac{x}{y}}dx\,dy$ که در آن D ناحیه محدود به سهمی $y^2=x$ و خطوط $y=1, x=0$ می‌باشد.

حل: ابتدا ناحیه D را رسم می‌کنیم.



بدیهی است ناحیه فوق هم نسبت به متغیر x و هم نسبت به متغیر y منظم است ولی امکان محاسبه تابع اولیه $e^{\frac{x}{y}}$ فقط نسبت به متغیر x وجود دارد، لذا می‌نویسیم:

$$I=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy=\int_{y=0}^{1} dy.\left[\left. y\,e^{\frac{x}{y}}\right]\right|_{0}^{y^2}=\int_{y=0}^{1}\left(ye^{y}-y\right)dy=ye^{y}-e^{y}-\left.\frac{y^2}{2}\right|_{0}^{1}=\frac{1}{2}$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int\int_D x\ln y\,dA$ که در آن D ناحیه محدود به خطوط $x=2$، $y=1$ و منحنی $xy=1$ می‌باشد.

راه حل اول:

$$I=\int_{x=1}^{2}\int_{y=\frac{1}{x}}^{1} x\ln y\,dydx=\int_{x=1}^{2} xdx\int_{y=\frac{1}{x}}^{1}\ln y\,dy=\int_{x=1}^{2} x.[y\ln y-y]_{\frac{1}{x}}^{1}dx=\int_{x=1}^{2} x\left[-1-\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right]dx=$$

$$\int_{x=1}^{2}(-x+\ln x+1)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\ln x-x+x\right]_1^2=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\ln x\right]_1^2=(-2+2\ln 2)-\left(-\frac{1}{2}+\ln 1\right)=2\ln 2-\frac{3}{2}$$

راه حل دوم:

$$I=\int_{y=\frac{1}{2}}^{1}\int_{x=\frac{1}{y}}^{2} x\ln y\,dxdy=\int_{y=\frac{1}{2}}^{1}\ln y.\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{y}}^{2}dy=\int_{y=\frac{1}{2}}^{1}\left(2\ln y-\frac{1}{2y^2}\ln y\right).dy=\left[2y\ln y-2y+\frac{1}{2y}\ln y+\frac{1}{2y}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=-2+\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}+1-\ln\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}-2(\ln 1-\ln 2)=2\ln 2-\frac{3}{2}$$

۳-۲) تغییر در ترتیب انتگرال‌گیری:

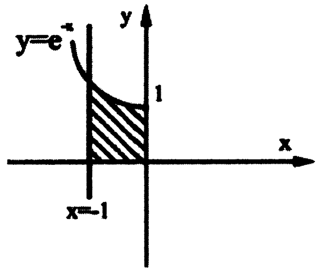
برخی مواقع یک انتگرال دوگانه داده می‌شود که در آن حدود انتگرال نوشته شده است و به هر دلیلی مایلیم ترتیب انتگرال‌گیری را نسبت به حالت مطرح شده تغییر دهیم، در این گونه مواقع کافی است با توجه به حدود نوشته شده در فرض مسئله، میدان انتگرال‌گیری را ترسیم کرده و با توجه به این میدان، حدود انتگرال را به طور مقتضی بنویسیم.

مسائل حل شده:

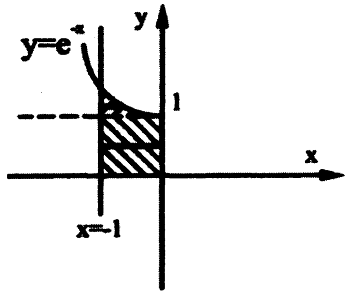
مثال ۱: انتگرال دوگانه زیر را در نظر بگیرید $I=\int_{x=-1}^{0}\int_{y=0}^{e^{-x}} f(x,y)\,dy\,dx$ در این مسئله ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنید.

حل: نخست میدان انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم:

$$D:\begin{cases}x=-1\\x=0\\y=0\\y=e^{-x}\end{cases}$$



بدیهی است که ناحیه فوق نسبت به متغیر x نامنظم است. بنابراین با شکستن این ناحیه به چند قسمت کوچکتر که هر کدام نسبت به محور x منظم می‌باشد می‌نویسیم.

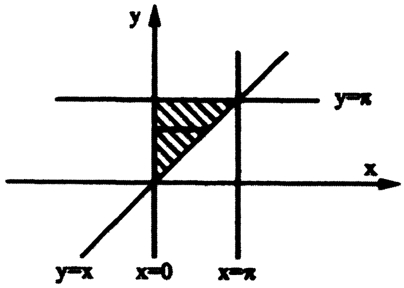


پس انتگرال فوق به انتگرال زیر تبدیل می‌شود.

$$I=\int_{y=0}^{1}\int_{x=-1}^{0}f(x,y)\,dx\,dy+\int_{y=1}^{e}\int_{x=-1}^{-\operatorname{Ln}y}f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$.

حل: ملاحظه می‌شود حدود انتگرال‌ها به گونه‌ای نوشته شده که ترتیب انتگرال‌گیری را نسبت به متغیر y در اولویت قرار می‌دهد. البته ما می‌دانیم محاسبه تابع اولیه $\frac{\sin y}{y}$ امکان پذیر نیست بنابراین با توجه به حدود نوشته شده میدان انتگرال‌گیری را رسم کرده و حدود را تعویض می‌کنیم.

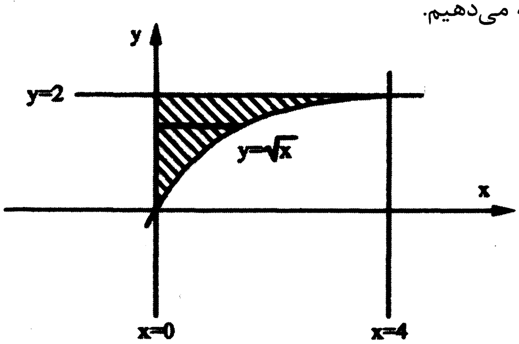


$$I=\int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{y}\frac{\sin y}{y}\,dx\,dy=\int_{y=0}^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy.x\Big|_0^y$$

$$=\int_{y=0}^{\pi}\sin y\,dy=-\cos y\Big|_0^{\pi}=2$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int_0^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin y^3\,dy\,dx$.

حل: بدیهی است محاسبه تابع اولیه $\sin y^3$ نسبت به y امکان پذیر نمی‌باشد لذا با توجه به حدود انتگرال، میدان انتگرال‌گیری را رسم کرده و در ادامه ترتیب انتگرال‌گیری را نیز عوض کرده ومسئله را ادامه می‌دهیم.



$$I=\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{y^2}\sin y^3\,dx\,dy=\int_{y=0}^{2}\sin y^3\,dy.x\Big|_0^{y^2}$$

$$=\int_{y=0}^{2}y^2\sin y^3\,dy=-\frac{1}{3}\cos y^3\Big|_0^2=-\frac{1}{3}(\cos 8-1)$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy$ کـه در آن D ناحیـه محـدود بـه خطـوط $x=1$، $y=0$ و سـهمی $y=x^2$ است.

حل: بدیهی است محاسبه تابع اولیه $e^{\frac{y}{x}}$ نسبت به x غیرممکن است. لذا با توجه به ناحیه D میدان انتگرال‌گیری را عـوض کـرده و در ادامه ترتیب انتگرال‌گیری را نیز عوض کرده و مسئله را ادامه می‌دهیم.

$$I=\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dydx=\int_{x=0}^{1}\left[xe^{\frac{y}{x}}\right]_0^{x^2}dx=\int_{x=0}^{1}(xe^x-x)dx$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار انتگرال } \int xe^x dx \text{ ، از روش جزء به جزء بدست می‌آید.}} I=\left[xe^x-e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

۲-۴) محاسبه انتگرال‌های دوگانه وقتی تابع زیر علامت انتگرال در کل ناحیه انتگرال‌گیری طبیعت منحصر به فردی ندارد.

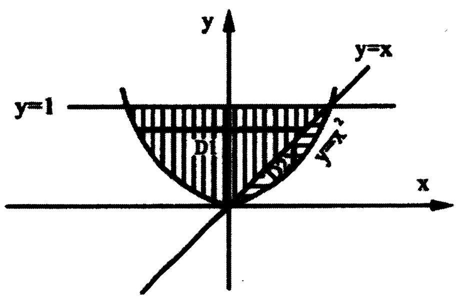
قاعده کلی: برای محاسبه این نوع انتگرال‌ها به طریقی مناسب ناحیه انتگرال‌گیری را به زیر نواحی کوچکتر به گونه‌ای تقسیم کنیم که در هر کدام از آن زیر نواحی بتوان تکلیف تابع زیر علامت انتگرال را تعیین کرد و سپس حل مسئله را ادامه می‌دهیم.

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محصور شـده بـه سـهمی $y=x^2$ و خـط $y=1$ است و $f(x,y)=\begin{cases}1 & x<y\\ x & x>y\end{cases}$ می‌باشد.

حل:

ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم.

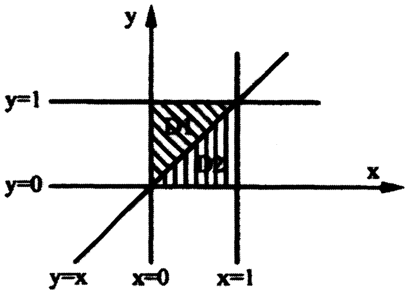


$$I=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}\quad\Rightarrow\quad I=\int_{y=0}^{1}\int_{x=-\sqrt{y}}^{y}(1)\,dx\,dy+\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{x}(x)\,dy\,dx\quad\Rightarrow\quad I=\int_{y=0}^{1}dy.x\Big|_{-\sqrt{y}}^{y}+\int_{x=0}^{1}dx.xy\Big|_{x^2}^{x}$$

$$\Rightarrow\quad I=\int_{y=0}^{1}\left(y+\sqrt{y}\right)dy+\int_{x=0}^{1}\left(x^2-x^3\right)dx=+\frac{7}{6}+\frac{1}{12}=\frac{15}{12}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ که در آن D به صورت $D:\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1;0\le y\le 1\}$ و $f(x,y)=\begin{cases}x & x<y\\ y & x\ge y\end{cases}$.

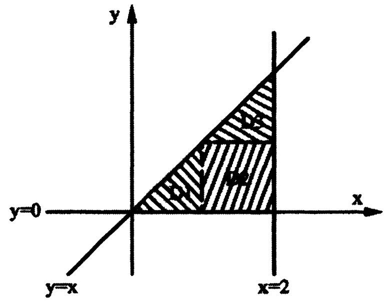
حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم:



$$I=\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y}x\,dxdy+\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1}y\,dxdy=\int_{y=0}^{1}\frac{1}{2}y^2\,dy+\int_{y=0}^{1}y(1-y)\,dy=\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I=\iint_D\left([x]+[y]\right)dx\,dy$ که در آن D مثلثی با اضلاع $x=2;y=x;y=0$ می‌باشد.

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم.



$$I=\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\iint_{D_3}=\iint_{D_1}(0+0)dxdy+\iint_{D_2}(1+0)dxdy+\iint_{D_3}(1+1)dx\,dy=0+(\text{مساحت ناحیه } D_2)+2(\text{مساحت ناحیه } D_3)=$$

$$(1\times1)+2\times\left(\frac{1\times1}{2}\right)=2$$

۲-۵) تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه:

انتگرال دوگانه $I=\iint_D f(x,y)dx\,dy$ را در نظر بگیرید چنانچه به هر دلیلی بخواهیم ازتغییر متغیرهای $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ استفاده کنیم لازم است نخست تبدیل یافته ناحیه D که در صفحه (x,y) تعریف شده است را در صفحه (u,v) پیدا کرده (آن را D' می‌نامیم) و سپس تابع $f(x,y)$ را برحسب متغیرهای (u,v) بازنویسی کنیم (آن را $h(u,v)$ می‌نامیم)، در انتها ژاکوبین تغییر دستگاه مختصات را که با J نشان می‌دهند بدست می‌آوریم.

$$J=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Rightarrow \boxed{J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}} \overset{\text{یا}}{\Rightarrow} J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}$$

حال با توجه به اینکه $dx\,dy=|J|du\,dv$ می‌توان نوشت:

$$\boxed{I=\iint_{D'} h(u,v).|J|du\,dv}$$

توجه کنید معمولاً در دو حالت زیر بحث تغییر متغیر مطرح می‌شود:

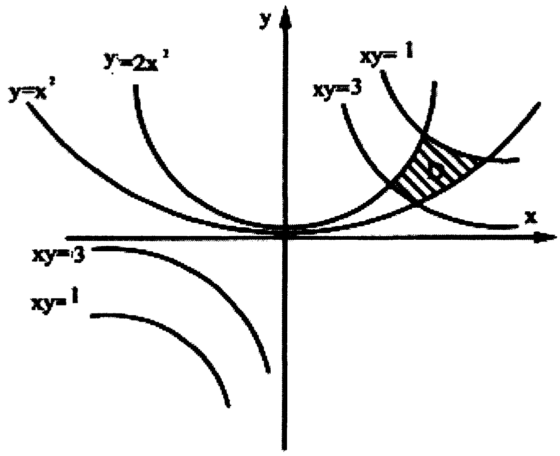
۱ـ پیچیده بودن ناحیه انتگرال‌گیری

۲ـ پیچیده بودن تابع زیر علامت انتگرال‌گیری

مسائل حل شده:

مثال ۱: مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $xy=3; xy=1; y=2x^2; y=x^2$ را بدست آورید؟

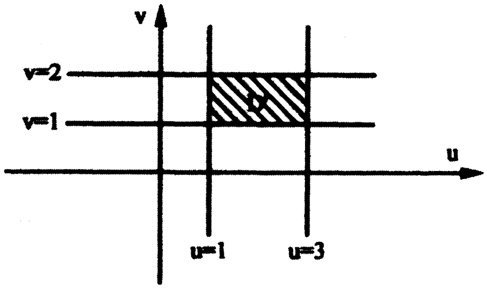
حل: ابتدا ناحیه D را رسم می‌کنیم:



با توجه به پیچیده بودن ناحیه D از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}xy=u\\ \frac{y}{x^2}=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy=1\Rightarrow u=1\\ xy=3\Rightarrow u=3\\ y=x^2\Rightarrow v=1\\ y=2x^2\Rightarrow v=2\end{cases}$$

حال ناحیه D' را رسم کرده و سپس ژاکوبین دستگاه را حساب می‌کنیم:



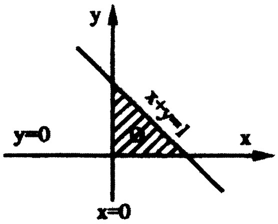
$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{3y}{x^2}} = \frac{1}{3v}$$

پس در کل داریم:

$$s = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \left|\frac{1}{3v}\right| du\,dv = \int_{v=1}^{2}\int_{u=1}^{3} \frac{1}{3v} du\,dv = \frac{1}{3}u\Big|_1^3 .Lnv\Big|_1^2 = \frac{2}{3}Ln2$$

مثال۲: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $I = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dy\,dx$ تحت ناحیه محدود به $x+y=1$; $x=0$; $y=0$ است.

حل: ابتدا ناحیه D را رسم می‌کنیم:



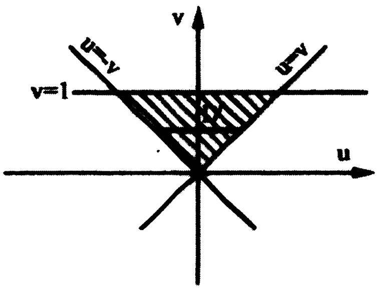
اگر به متن درس مراجعه کنید متوجه می‌شوید که ما بحث تغییر متغیر را در دو حالت مطرح می‌کنیم:

۱ـ پیچیده بودن ناحیه انتگرال‌گیری

۲ـ پیچیده بودن تابع زیر علامت انتگرال

که اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم که مسئله ما از نوع دوم است. لذا باید از تغییر متغیر $\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{v-u}{2} \end{cases}$ استفاده کنیم.

حال برای رسم ناحیه D' شروط ناحیه D را می‌گذاریم تا شکل ناحیه D' مشخص شود.



$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \frac{u+v}{2}=0 \Rightarrow u=-v \\ y=0 \Rightarrow \frac{v-u}{2}=0 \Rightarrow v=u \Rightarrow u=+V \\ x+y=1 \Rightarrow v=1 \end{cases}$$

حال ژاکوبین دستگاه را حساب می‌کنیم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

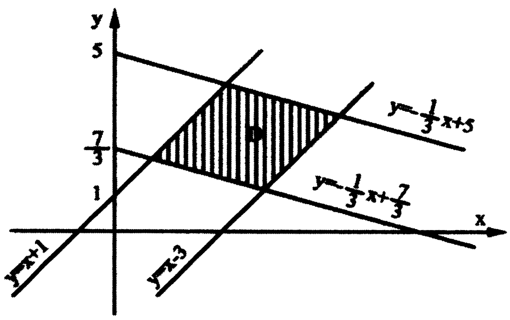
$$I=\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dy\,dx=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}.\left|\frac{1}{2}\right|dudv=\int_{v=0}^{1}\int_{u=-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}.\frac{1}{2}.du.dv=\int_{v=0}^{1}\frac{1}{2}dv.\,v.e^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right)\int_{v=0}^{1} vdv=\frac{1}{4}\left(e-e^{-1}\right)=\frac{e^2-1}{4e}$$

مثال ۳: انتگرال دوگانه $I=\iint_D (y-x)\,dx\,dy$ را، که در آن D بین خطوط زیر محصور شده است را محاسبه کنید؟

$$y=x+1;\ y=x-3;\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3};\ y=-\frac{1}{3}x+5$$

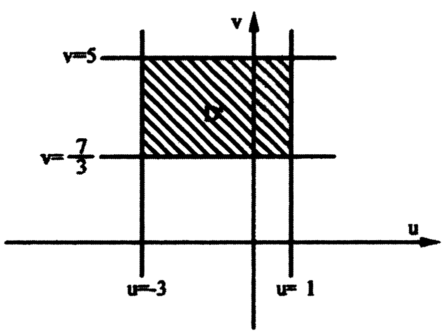
حل: ابتدا ناحیه را رسم می‌کنیم:



همانطور که ملاحظه می‌شود بنا به پیچیده بودن ناحیه D باید از تغییر متغیر استفاده کنیم لذا داریم:

$$\begin{cases}u=y-x\\ v=\frac{1}{3}x+y\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}y-x=1\Rightarrow u=1\\ y-x=-3\Rightarrow u=-3\\ \frac{1}{3}x+y=\frac{7}{3}\Rightarrow v=\frac{7}{3}\\ \frac{1}{3}x+y=5\Rightarrow v=5\end{cases}$$

حال ناحیه D' را رسم می‌کنیم:



حال ژاکوبین دستگاه را بدست می‌آوریم:

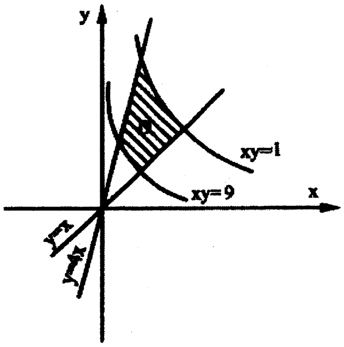
$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{3} & 1\end{vmatrix}}=-\frac{3}{4}$$

و با توجه به اینکه $|J|=\frac{3}{4}$ است لذا داریم:

$$I=\iint_D (y-x)\,dxdy=\int_{v=\frac{7}{3}}^{5}\int_{u=-3}^{1}\frac{3}{4}u.du\,dv=-8$$

مثال ۴: انتگرال دوگانه $\iint_D\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dx\,dy$ را، که در آن D ناحیه واقع در ربع اول صفحه xy و محدود به هذلولی‌های $xy=9; xy=1$ وخطوط $y=4x, y=x$ می‌باشد را محاسبه کنید.

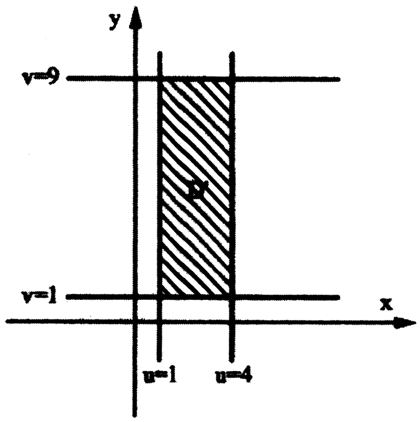
حل: ابتدا ناحیه مربوطه را رسم می‌کنیم:



همانطور که ملاحظه می‌شود با توجه به پیچیده بودن ناحیه D باید از تغییر متغیر $\begin{cases}y=ux\\ xy=v\end{cases}$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{y}{x}=u\\ xy=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=1\\ u=4\\ v=1\\ v=9\end{cases}$$

حال ناحیه D' را رسم می‌کنیم:



حال ژاکوبین دستگاه را بدست می‌آوریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\\ y & x\end{vmatrix}}=\frac{-1}{2u}$$

و با توجه به اینکه $|J|=\frac{1}{2u}$ است لذا داریم:

$$I=\iint_D\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dx\,dy=\iint_{D'}\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right).\frac{1}{2u}du.dv\Rightarrow\int_{v=1}^{9}\int_{u=1}^{4}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{v}}{u}\right)du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{v=1}^{9}\left[2u^{\frac{1}{2}}+\sqrt{v}\,\mathrm{Ln}\,u\right]\Bigg|_1^4 dv=\frac{1}{2}\int_{v=1}^{9}\left(2+\sqrt{v}\,\mathrm{Ln}4\right)dv=8+\frac{52}{3}\mathrm{Ln}\,2$$

۲-۶) استفاده از مختصات قطبی در انتگرال‌های دوگانه:

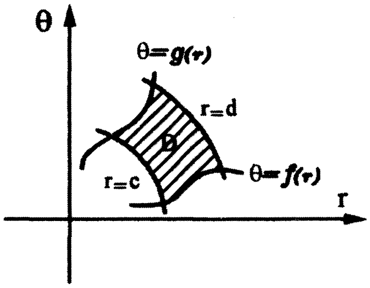
همانطور که می‌دانیم متغیرهای دستگاه مختصات قطبی (r,θ) عبارتند از:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\\ |J|=r\Rightarrow dx\,dy=rdrd\theta\end{cases}$$

در بسیاری مواقع با وجود ترمهایی نظیر $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ در منحنی‌های مرزی یا در تابع زیر انتگرال، اعمال تغییر متغیرهای زیر مناسب است:

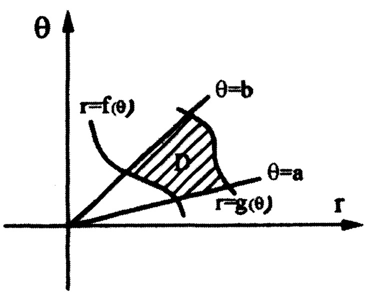
$$\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}\Rightarrow dxdy=(abr)\,drd\theta$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$$

نکته ۱: در صورتیکه میدان D نسبت به θ منظم باشد، المان محیطی انتخاب می‌کنیم



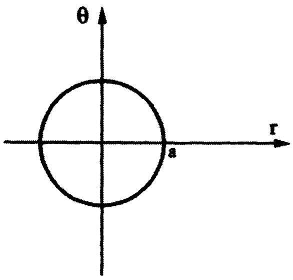
$$\int_{r=c}^{r=d}\int_{\theta=f(r)}^{\theta=g(r)}P(r,\theta)\,d\theta dr$$

در صورتیکه میدان D نسبت به r منظم باشد، المان شعاعی انتخاب می‌کنیم.

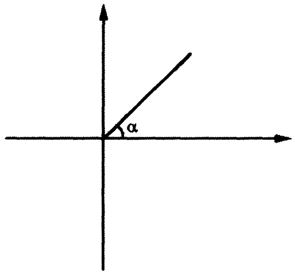


$$\int_{\theta=a}^{\theta=b}\int_{r=f(\theta)}^{r=g(\theta)}P(r,\theta)\,drd\theta$$

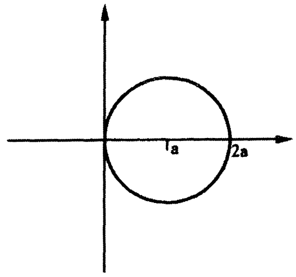
نکته ۲: شکل‌های چند منحنی زیر که در فرم قطبی توصیف شده‌اند را به خاطر داشته باشید.



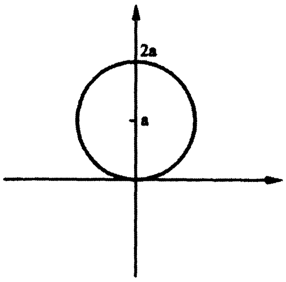
$r=a$



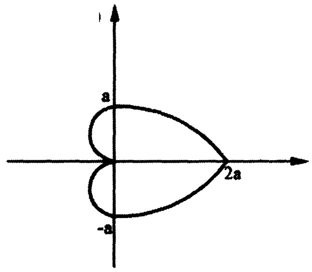
$\theta=\alpha$



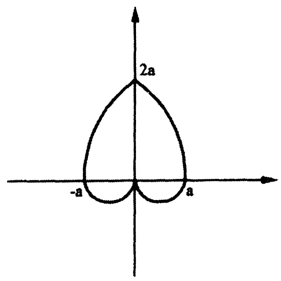
$r=2a\cos\theta$



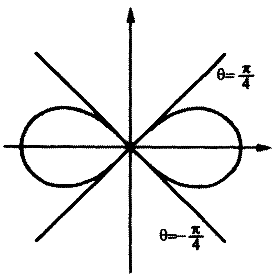
$r=2a\sin\theta$



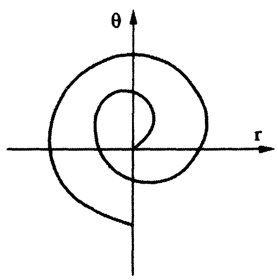
$r=a(1+\cos\theta)$



$r=a(1+\sin\theta)$



$r=a\sqrt{\cos 2\theta}$



$r=\theta$

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه $I=\iint_D \left(x^2-y^2\right)dx\,dy$ که در آن D ناحیه محصور بین دوایر $x^2+y^2=4;x^2+y^2=1$ و خطوط $y=-x$ و $x=0$ است.

حل: ابتدا ناحیه D را رسم می‌کنیم.