

دایاں  
۱۱/۱۲/۲۲  
کتاب معادلات ریفرانسبل خطی مرتبه اول، در غیر این صورت غیر خطی یا غیر مرتبه اول

مرتبه اول  
خطی  
غیر خطی

سوال: مرتبه و نوع معادلات را مشخص کنید

الف)  $y^5 + e^x y'' + \sin(x+y) y' + y^2 = \ln x \Rightarrow$  غیر خطی - مرتبه بیستم

ب)  $f''(x) + f'(x) + \sin x = e^x \Rightarrow$  خطی - مرتبه دوم

ج)  $y'' + e^y = e^x \Rightarrow$  نامعین از y و غیر استیلا  $\Rightarrow$  غیر خطی - مرتبه دوم

د)  $x^2 y'' + x y' + 2y = 0 \Rightarrow$  خطی - مرتبه دوم

ه)  $F(y)^2 + \ln(x) \cdot (y) = e^x \Rightarrow$  غیر خطی - مرتبه اول

و)  $\frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx} + (\cos x) y = x^3 \Rightarrow$  خطی - مرتبه بیستم

ز)  $y'' + \sin(x+y) y = 1 \Rightarrow$  غیر خطی - مرتبه دوم

معادله ریفرانسبل خطی مرتبه اول:

فرم کلی خطی:  $a_0(x)y' + a_1(x)y = g(x) \Rightarrow y' + p(x)y = q(x)$

فرم کلی:  $f(y', y, x) = 0 \Rightarrow y' = f(x, y)$

$y' = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$

حل معادله دفرانسیل مرتب اول:  $\Rightarrow$  مثال ۱  $\Rightarrow e^x y' + \sin(x+y) - \ln x = 0$

مرتب اول غیر خطی  $\Rightarrow y' = \frac{\ln x - \sin(x+y)}{e^x} \Rightarrow y' = f(x,y)$

ساده ترین نوع معادله دفرانسیل مرتب اول معادله  $y' = g(x)$  است.

$\Rightarrow y' = g(x) \Rightarrow y = \int g(x) dx + C$

در جواب یک پارامتری  
ای رومی شود...

مثال ۲  $\Rightarrow y' = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$   $\Rightarrow$  مرتب اول

$\Rightarrow y = \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx + C \Rightarrow y = \int \frac{e^x - 1 + 2}{e^x - 1} dx$

$\Rightarrow \int dx + 2 \int \frac{1}{e^x - 1} dx \Rightarrow y = x - 2 \ln |1 - e^{-x}| + C$

$\Rightarrow \int \frac{1}{e^x - 1} dx \xrightarrow{u=e^{-x}} \int \frac{e^{-x} dx}{1 - e^{-x}} \Rightarrow \begin{cases} u = e^{-x} \\ du = -e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \int \frac{-du}{1-u} = -\ln |1-u|$

$= -\ln |1 - e^{-x}|$

\* نکته \*

در جواب معادله دفرانسیل مرتب اول یک پارامتر ظاهر می شود که این جوابها، جواب عمومی

معادلات دفرانسیل گفته می شود، اگر مقدار یک تابع در یک نقطه داده شده باشد  $y(x_0) = y_0$  این

شرط را شرط مرزی می گویند.

مثال  $\Rightarrow y' = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

شرط مرزی  
 $y(1) = 1$

$\Rightarrow y = x - 2 \ln |1 - e^{-x}| + C$

$\Rightarrow 1 = 1 - 2 \ln |1 - e^{-1}| + C$

$\Rightarrow C = 2 \ln |1 - e^{-1}|$

$$y^n = g(x) \Rightarrow \text{نابرامتر دارد} \Rightarrow \text{نابرامتر است} \Rightarrow \text{نابرامتر است}$$

- معادله دیفرانسیل مرتبه اولی به فرم  $y' = \frac{M(x)}{N(y)}$  باشد آنگاه معادله معادله دیفرانسیل

$$\text{جدایش می‌کنیم و برای حل آن } H(x) = \int M(x) \cdot dx, \quad G(y) = \int N(y) \cdot dy$$

میرسیم. جواب معادله  $H(x) - G(y) = C$  است. زیرا:

$$\frac{dH}{dx} - \frac{dG}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dx} - \frac{dG}{dy} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow M(x) - N(y) = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{M(x)}{N(y)}$$

$$\text{نمونه 1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1+y^2} \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\frac{1}{y} + y}$$

$$M(x) = \cos x \quad N(y) = \frac{1}{y} + y \Rightarrow G(y) = \int \left( \frac{1}{y} + y \right) dy$$

$$H(x) = \int \cos x \cdot dx$$

$$H(x) = \sin x$$

$$G(y) = \ln(y) + y^2 \Rightarrow \sin x + C = \ln(y) + y^2$$

$$\text{نمونه 2} \Rightarrow e^{-x} \frac{dy}{dx} = e^{x+1} \cdot dx$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+1}}{e^{-y}} \Rightarrow e^{-y} \cdot dy = e^{x+1} \cdot dx$$

$$\int e^{-y} \cdot dy = \int e^{x+1} \cdot dx \Rightarrow -e^{-y} = e^{x+1} + C$$