۱۳ ـ یک کره و یک استوانه با حجم مساوی از جنس مس هر دو در دمای یکسان اولیه‌ای قرار دارند. هر دو به طور یکسان در معرض جابه‌جایی با محیط با دمای کمتر قرار می‌گیرند. کدام‌یک زودتر سرد می‌شوند؟

۱) استوانه زودتر از کره سرد می‌شود.
۲) کره زودتر از استوانه سرد می‌شود.
۳) هر دو به طور مساوی سرد می‌شوند.
۴) بستگی به طول استوانه و شعاع کره دارد.

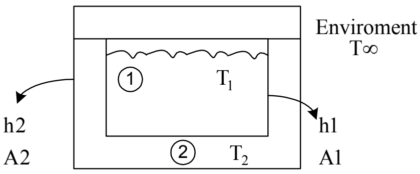
حل: گزینه ۱ درست است.

$$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad\Rightarrow\quad \tau=\frac{mc}{h.A}$$

$$V_S=V_C \quad\Rightarrow\quad m_s=m_c$$

پس ثابت زمانی (τ) نیز تابع مساحت (A) است. این قابل اثبات است که به ازای یک حجم معین، کره کمترین مساحت را نسبت به تمام حجم‌های سه‌بعدی دیگر دارد، بنابراین τ برای کره بیشتر از استوانه بوده و بنابراین دیرتر خنک می‌شود.

۱۴ ـ برای سیستم انتقال حرارت مطابق شکل، با فرض انتقال حرارت متمرکز(Lumped Capacity) کدام‌یک از گزینه‌ها به درستی مسئله را فرموله می‌کند؟



۱) $h_1A_1(T_1-T_2)=-\rho_1C_1V_1\frac{dT_1}{dt}$

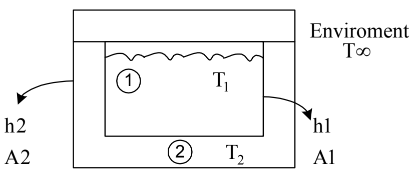
۲) $h_2A_2(T_1-T_2)=-\rho_1C_1V_1\frac{dT_1}{dt}$

۳) $h_1A_1(T_2-T_1)+h_2A_2(T_2-T_\infty)=-\rho_2C_2V_2\frac{dT_2}{dt}$

۴) گزینه ۱و۳ به طور همزمان

حل: گزینه ۴ درست است.

۱۵ ـ فرض می‌کنیم شرایط استفاده از روش ظرفیت کلی برقرار است. به عبارتی دمای مایع ① در تمام نقاط آن و همچنین دیواره ② یکنواخت است. بنابراین:



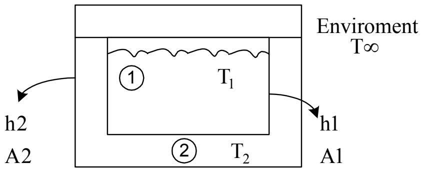
① جسم: $\underset{0}{\cancel{\dot{E}_{in}}}+\underset{0}{\cancel{\dot{E}_{gen}}}-\dot{E}_{out}=\dot{E}_{st} \quad\Rightarrow\quad h_1A_1\left(T_1-T_2\right)=-\rho_1C_1V_1\frac{dT_1}{dt}$

② جسم: $\underset{0}{\cancel{\dot{E}_{in}}}+\underset{0}{\cancel{\dot{E}_{gen}}}-\dot{E}_{out}=\dot{E}_{st} \quad , \quad \dot{E}_{out}=h_2A_2\left(T_2-T_\infty\right)+h_1A_1\left(T_2-T_1\right)$

$$\Rightarrow\quad h_1A_1\left(T_2-T_1\right)+h_2A_2\left(T_2-T_\infty\right)=-\rho_2C_2V_2\frac{dT_2}{dt}$$

یادداشت:

....
....
....
....



۱) $h_1A_1(T_1-T_2)=-\rho_1C_1V_1\dfrac{dT_1}{dt}$

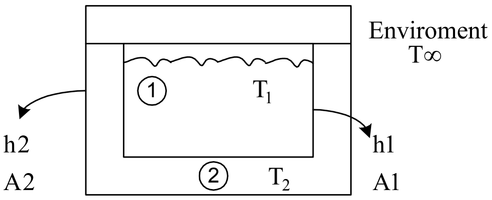
۲) $h_2A_2(T_1-T_2)=-\rho_1C_1V_1\dfrac{dT_1}{dt}$

۳) $h_1A_1(T_2-T_1)+h_2A_2(T_2-T_\infty)=-\rho_2C_2V_2\dfrac{dT_2}{dt}$

۴) گزینه ۱و۳ به طور همزمان

حل: گزینه ۴ درست است.

فرض می‌کنیم شرایط استفاده از روش ظرفیت کلی برقرار است. به عبارتی دمای مایع ① در تمام نقاط آن و همچنین دیواره ② یکنواخت است. بنابراین:



① جسم : $\underset{0}{\cancel{\dot{E}_{in}}}+\underset{0}{\cancel{\dot{E}_{gen}}}-\dot{E}_{out}=\dot{E}_{st} \quad \Rightarrow \quad h_1A_1\left(T_1-T_2\right)=-\rho_1C_1V_1\dfrac{dT_1}{dt}$

② جسم : $\underset{0}{\cancel{\dot{E}_{in}}}+\underset{0}{\cancel{\dot{E}_{gen}}}-\dot{E}_{out}=\dot{E}_{st} \quad , \quad \dot{E}_{out}=h_2A_2\left(T_2-T_\infty\right)+h_1A_1\left(T_2-T_1\right)$

$$\Rightarrow \quad h_1A_1\left(T_2-T_1\right)+h_2A_2\left(T_2-T_\infty\right)=-\rho_2C_2V_2\frac{dT_2}{dt}$$

۱۶ ـ می‌توان نشان داد که حل دقیق معادله انتقال حرارت ناپایدار، از یک صفحه بی‌نهایت که تحت تأثیر محیط قرار می‌گیرد، منجر به تعیین مقادیر مشخصه λ_n از این رابطه می‌گردد: $\lambda_n L\tan\left(\lambda_n L\right)=Bi$

L نصف ضخامت صفحه و Bi بیانگر عدد بیو می‌باشد.

با توجه به رابطه فوق در صورت کوچک بودن عدد بیو به صورت تقریبی می‌توانیم بنویسیم: (به طوری که α ضریب پخش یا نفـوذ، A سطح تبادل حرارت و V حجم می‌باشد.) **(۸۹ ـ ۸۸)**

۱) $\alpha\lambda_n^2=\dfrac{\rho CV}{hA}$ ۲) $\alpha\lambda_n^2=\dfrac{hA}{\rho CV}$ ۳) $\alpha\lambda_n^2=-\dfrac{\rho CV}{hA}$ ۴) $\alpha\lambda_n^2=-\dfrac{hA}{\rho CV}$

حل: گزینه ۲ درست است.

حل یک بعدی توزیع دمای گذرا برای صفحه تخت که به وسیله جابجایی با سیال اطراف تبادل حرارت می‌کند با رابطه

$$\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\exp\left(-\alpha\lambda_n^2t\right)\cos\left(\lambda_n x\right)$$

داده می‌شود که برای $Bi\to 0$ این حل با دمای به دست آمده از روش ظرفیت کلی که به صورت زیر است

$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\exp\left(-\frac{hA}{\rho\forall C}t\right)$$

یادداشت:

....

....

....

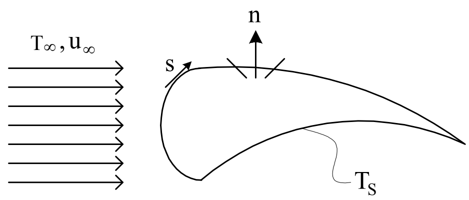
....

یکی می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\cancel{-}\alpha\lambda_n^2 = \cancel{-}\frac{hA}{\rho\forall C}$$

۶ـ جابه‌جایی در جریان خارجی

قانون سرمایش نیوتن



$$q'' = q''(s) = h(T_s - T_\infty) \rightarrow (I)$$

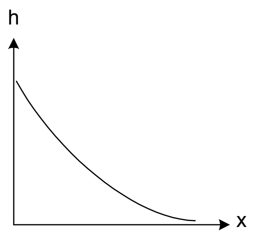
$$\bar{h} = \frac{1}{A_s}\int_{A_s} h(s)dA_s$$

$$h = \frac{-k_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \rightarrow (II)$$

$$\left[h \propto \frac{k_f}{\delta_T}\right]$$

از رابطه به دست آمده می‌توان مشاهده کرد که روند تغییرات h با x دقیقاً معکوس روند تغییرات δ_T با x است و ازآنجاکه روند تغییرات δ_T با x صعودی است، بنابراین تغییرات h برحسب x مطابق شکل ۶-۵ نزولی خواهد بود.

همچنین چون برای یک صفحه نازک در x=0 ، δ_T=0 است، نتیجه می‌شود که در ابتدای صفحه $h\rightarrow\infty$.



شکل ۶-۵

مراحل تعیین h به صورت تحلیلی:

برای تعیین ضریب جابه‌جایی روی یک صفحه تخت به صورت تحلیلی مراحل زیر به طور خلاصه انجام می‌شود.

۱- به دست آوردن T(x, y) با حل معادلات دیفرانسیل بقا در سیال:

ابتدا معادله ممنتم در جهت x و معادله پیوستگی جهت تعیین سرعت‌های u و v حل می‌شوند.

یادداشت:

....
....
....
....

$$.x-\text{mom.}: u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

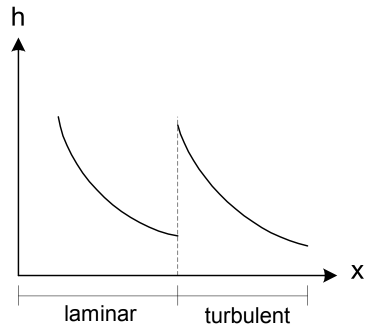
$$.\text{Continuity}: \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

سپس معادله انرژی برای توزیع دما در داخل لایه مرزی حل می‌شود:

$$.\text{Energy}: u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

۲- تعیین $\frac{\partial T}{\partial y}$ و به دست آوردن $h(x)$ از رابطه (II).

جریان آرام و درهم:



روابط مربوط به عدد نوسلت، ضریب اصطکاک C_f و نیز ضخامت لایه مرزی برای صفحه تخت در جریان موازی آرام و درهم به شکل زیر است:

$$Nu_x=\frac{hx}{k_f}, C_{f_x}=\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

$$\text{Laminar} \quad , \quad C_{f_x}=0.664\,Re_x^{-\frac{1}{2}}, \frac{\delta}{x}=5\,Re_x^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad Nu_x=0.0332\,Re_x^{1/2}\,Pr^{1/3} \quad 0.6<Pr<60$$

$$\text{Turbulent} \quad , \quad C_{f_x}=0.0592\,Re_x^{-\frac{1}{5}}, \frac{\delta}{x}=0.37\,Re_x^{-\frac{1}{5}} \quad , \quad Nu_x=0.0296\,Re_x^{4/5}\,Pr^{1/3} \quad 0.6<Pr<60$$

تشابه لایه مرزی:

ازآنجاکه h تابعی از تعداد زیادی پارامتر است و نیز با توجه به اینکه بین معادله انرژی و ممنتم در لایه مرزی تشابه زیادی وجود دارد، با استفاده از آنالیز ابعادی پارامترهای بی‌بعد معادلات زیر را می‌یابیم:

$h=h(k_f, U_\infty, \rho, C_p, \mu, x, L)$

1. $Re_x \equiv \frac{U_\infty \cdot x}{\nu}$,   عدد رینولدز

2. $Pr \equiv \frac{\nu}{\alpha}$,   عدد پرانتل

یادداشت:

....
....
....
....