۲۳، ۲۴، ۲۸

شماره سؤال

۱- ~~[illegible]~~ فرض کنیم

$$P(z)=(z+1)^n-z^n-1,\quad Q(z)=z^2+z+1$$

الف: ثابت کنید که

$$Q(z)=\left(z-e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(z-e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)$$

ب: چرا برای اعداد صحیح $n=6k\pm1$، $z=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ یکی از ریشه‌های $P(z)$ است؟

ج: یک ریشهٔ دیگر $P(z)$ را حدس بزنید و نتیجه بگیرید که برای اعداد صحیح $n=6k\pm1$، $P(z)$ بر $Q(z)$ بخش‌پذیر است.

حل: الف:

$$z^2+z+1=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_1=e^{\frac{2\pi}{3}i},\quad z_2=e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

ب:

$$P(z)=\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}+1\right)^n-e^{\frac{2\pi}{3}in}-1=\left[\cos\frac{2\pi}{3}+1+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]^n$$

$$-\left[\cos\frac{2\pi n}{3}+i\sin\frac{2\pi n}{3}\right]-1=\left[2\cos^2\frac{\pi}{3}+2i\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right]^n$$

$$-\left[\cos\frac{2\pi n}{3}+i\sin\frac{2\pi n}{3}\right]-1=\underbrace{2^n\cos^n\frac{\pi}{3}}_{1}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$-\left(\cos\frac{2\pi n}{3}+i\sin\frac{2\pi n}{3}\right)-1=\left[\cos\frac{(6k\pm1)\pi}{3}+i\sin\frac{(6k\pm1)\pi}{3}\right]$$

$$-\left[\cos\frac{2\pi(6k\pm1)}{3}+i\sin\frac{2\pi(6k\pm1)}{3}\right]-1=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-1=0$$

شماره سوال

حل ج: ~~چون p(z) بر ج بخش پذیر است پس~~

چون $z_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ریشه $p(z)$ است پس $\bar{z}_1 = z_2 = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

نیز ریشه دیگر $p(z)$ است. پس $p(z)$ بر $Q(z)$ با $n=6k\pm1$

بخش پذیر است

پرسش ۲ــ الف: ثابت کنید که برای هر عدد مختلط $z\neq 0$ ، $-\pi<\theta\leq\pi$

داریم $|z^i|<e^{\pi}$

ب: $|\cos z|$ بی‌کران است.

حل الف:

$$z=|z|e^{i\theta} \Rightarrow |z^i| = \left||z|^i e^{-\theta}\right| = e^{-\theta}\left|e^{i\ln|z|}\right| = e^{-\theta}$$

اما چون $-\pi<\theta\leq\pi$ در نتیجه

$$|z^i| = e^{-\theta} < e^{\pi}$$

حل ب:

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x\, ch^2 y + \sin^2 x\, sh^2 y}$$

$$= \dots = \sqrt{\cos^2 x + sh^2 y} \longrightarrow$$ با افزایش y به ∞ میره

پرسش 3 : میدانیم که در بسط لوران $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ در داخل حلقه $a<|z-z_0|<b$ داریم

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \;:\; n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

که در آن C منحنی بسته ای درون حلقه بالاست که z_0 را احاطه کرده باشد.

حال با کمک اطلاعات بالا بسط لوران زیر را در نظر بگیرید که در آن t عددی حقیقی و ثابت است.

$$e^{\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{t}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)\,z^n$$

نشان دهید که برای $n\geq 0$:

$$J_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,d\theta$$

راهنمایی: $C:|z|=1$ را اختیار کنید

حل: $C=|z|=1$ میگیریم: $\Rightarrow z=e^{i\theta},\ dz=ie^{i\theta}d\theta$

$$J_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{e^{(z-z^{-1})t/2}}{z^{n+1}}\,dz=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\frac{t}{2}(2i\sin\theta)}(\cos n\theta-i\sin n\theta)\,d\theta=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos(t\sin\theta)+i\sin(t\sin\theta)\right]\left[\cos n\theta-i\sin n\theta\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,d\theta$$

در واقع $\int_0^{2\pi}\sin=0$ و $\int_0^{2\pi}\cos=2\int_0^{\pi}$

مرز تصویر ناحیه $x \geq 1$ و $y \geq 0$ را تحت تبدیل $W=\frac{1}{z}$ پیدا کنید

حل:

$$W=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v=-\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$(I)\begin{cases} y=0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=0 \\ u=\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow 0\leq u\leq 1$$

$$(II)\begin{cases} y\geq 0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{1+y^2} \\ v=\dfrac{-y}{1+y^2}\leq 0 \end{cases}$$

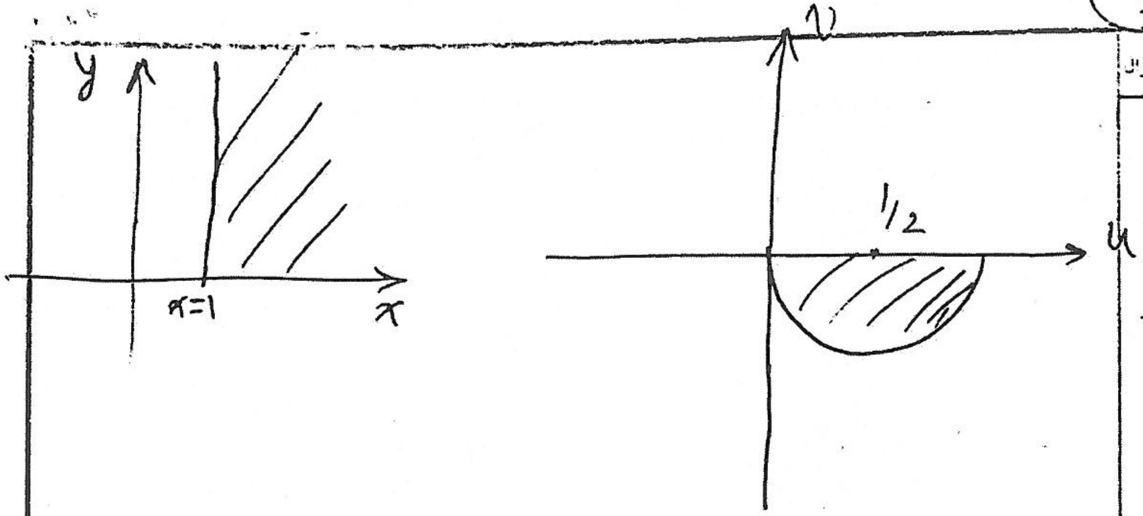
y را حذف کنیم:

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=u^2+\frac{1}{4}-u+v^2=$$

$$\left(\frac{1}{1+y^2}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{1+y^2}+\frac{y^2}{(1+y^2)^2}=\cdots=\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \left|w-\tfrac{1}{2}\right|<\tfrac{1}{2}$$

شماره سؤال



الف) از روش انتگرال‌گیری ثابت کنید

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} \qquad \left(-\frac{\pi i}{121} \quad \text{جواب}\right)$$

۴. ب)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^4+4}\,dx \qquad \left(\frac{\pi}{2e^{a}} \sin a \quad \text{جواب}\right)$$

$a>0$

وقت ۱۲۰ دقیقه	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران) دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر امتحان پایان‌ترم ریاضیات مهندسی نیمسال اول ۸۹-۸۸ (شنبه ۸۸/۱۰/۱۲)	۳۰۳

گروه:	شماره دانشجوئی:	نام و نام خانوادگی:

۱ تابع چندمقداری $w = z^{1/5}$ را درنظر بگیرید

الف) رابطه بین آرگومانهای (شناسه‌های) z و w را بنویسید.

ب) z چند دور حول مبدا بچرخد تا w دوباره مقدار اولیه شناسه خود را باز یابد.

۲ فرض کنید $1 > r > 0$ و $z = re^{i\theta}$.

الف) بسط ماکلورن $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ را بیابید

ب) ثابت کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

۳ الف) بسط‌های لرنت $f(z) = \dfrac{5z-2}{z(z-1)}$ را در قطب‌هایش بنویسید

ب) از روی بسط‌های لرنت در الف مانده‌ها را تعیین کنید

ج) انتگرال زیر را به‌دست آورید

$$I = \oint_{|z|=1} f(z)dz$$

د) به کمک فرمول $I = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\dfrac{1}{z^2} f(\dfrac{1}{z}); z_0 = 0\right]$ ثابت کنید $I = 10\pi i$.

۴ الف) نگاشت موبیوسی را بیابید که $|w| < 1 \leftarrow y > 0$ و $|w| = 1 \leftarrow y = 0$ و $0 \leftarrow 3i$ و $-i \leftarrow 3$.

ب) مشخص کنید که تحت تبدیل به‌دست آمده بازه $[-3,3]$ به چه خمی تصویر می‌شود و این خم را رسم کنید.

۵ هر یک از کانتور انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید

الف) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cancel{\tanh}(\pi z)}{4z^2+1} dz$ Sinh Cosh(πz)

ب) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \sin\cosh(e^z + z^2 + 1) dz$

ج) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx$

موفق باشید

۸۸/۱۰/۱۲

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

۱- الف)

$$z = re^{i\theta + 2k\pi i}$$

$$w = z^{\frac{1}{5}} = r^{\frac{1}{5}} e^{\left(\frac{\theta+2k\pi}{5}\right)i} \quad ; \; k = 0,1,2,3,4$$

$$w = Re^{i\varphi} \Rightarrow \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{5}$$

ب) اگر z ۵ دور حول مبدأ بچرخد ، w مقدار اولیه شناسه خود را باز می‌یابد . (؟)

۲- الف)

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

ب)

$$f(z) = \frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{r}{e^{-i\theta}-r} = \frac{r}{(\cos\theta - r) - i\sin\theta} =$$

$$= \frac{r(\cos\theta - r) + (r\sin\theta)i}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta + i r^n \sin\theta$$

با قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی باهم داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

۳- الف)

$$f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)}=\frac{5}{z-1}-\frac{2}{z(z-1)}=\frac{7}{z-1}-\frac{2}{z}$$

حول $z=0$: $f(z)=-\frac{2}{z}-7\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

حول $z=1$: $f(z)=\frac{7}{z-1}-\frac{2}{(z-1)+1}=\frac{7}{z-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}(-z+1)^n$

ب)

$$\mathrm{Res}\{f: z=0\}=-2\ ,\quad \mathrm{Res}\{f: z=1\}=7$$

ج)

$$I=\oint_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\sum \mathrm{Res}[f; z=z_i]=$$

$$=2\pi i(7-2)=10\pi i$$

د)

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^2}\left(\frac{\frac{5}{z}-2}{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}-1\right)}\right)=\frac{5-2z}{z(1-z)}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right); z_0=0\right]=\lim_{z\to 0}z\times\frac{5-2z}{z(1-z)}=5$$

$$\Rightarrow\quad I=2\pi i\times 5=10\pi i$$

۴-