بنویسید که ورودی آن سیگنال دلخواه x(t) بوده و خروجی آن اعدادی باشد که از روی خروجی یک A/Dی ۸ بیتی ساخته شده‌اند. فرض کنید حداقل و حداکثر مبدل را بین 0 تا 15 تنظیم کرده‌ایم. ضمناً فرض کنید سیگنال ورودی از یک تابع نوشته شده در همان فضا قابل خواندن است.

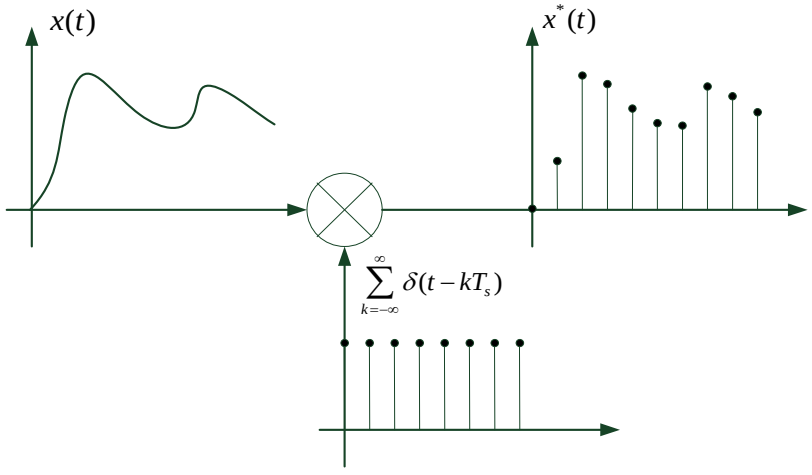
اتفاق دوم در عمل، عموماً اثرات غیر اساسی جانبی دارد و در تحلیل رفتار دینامیکی و پایداری چندان موثر نمی‌باشد و عموماً اثر آن نهایتاً به صورت یک خطای در دقت مدل می‌گردد. لذا در ادامه توجهی به اتفاق دوم نخواهیم داشت و اصولا به ابزارهای ریاضی خواهیم پرداخت که ما را در گذار از تحلیل در زمان پیوسته به تحلیل در زمان گسسته و بر عکس کمک کند، بدون توجه به پدیدهٔ پیمانه شدن!

۱-۱-۱) نمایش سیگنالهای نمونه برداری شده در حوزهٔ پیوسته و در حوزهٔ گسسته

سیگنالِ نمونه‌ها، x_d ، در حوزهٔ گسسته می‌تواند بصورت یک سری ضربه ولی با اندازه‌هایِ سیگنال در زمان‌های نمونه‌برداری بیان گردد، یعنی:

$$x_d(n) = x_c(nT_s) \qquad \text{یا} \qquad x_d(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c(kT_s)\,\delta(n-k) \qquad (۰)$$

لذاست که نمونه برداری از سیگنالِ دلخواه x(t) در فواصل زمانی معین T_s را می‌توان مانند آنچه در شکل زیر آمده است به صورت یک سری ضربه و یا حاصلضرب سیگنال با قطار ضربهٔ با همین فواصل زمانی، مدلسازی نمود. این طرز نمایشِ ریاضی برای نمایشِ سیگنال نمونه‌برداری شده در حوزهٔ پیوسته کاربردِ جدی دارد. در واقع هرجا که نیاز باشد تا سیگنالِ نمونه‌ها که اصالتاً در جهان گسسته موجودند، در جهان پیوسته نیز بیان گردند، از این تعبیرِ قطار ضربه‌ها کمک گرفته می‌شود.



شکل (۲)

عموماً برای نمایش سیگنال نمونه برداری شده از علامت ستاره استفاده می‌گردد. به این ترتیب سیگنال نمونه‌برداری شده به صورت زیر از رویِ سیگنال اصلی قابل بیان است:

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t-kT_s) \qquad (۱)$$

همین جا مفاهیم پریود نمونه برداری T_s تعداد نمونه‌ها در واحد زمان (به هرتز)f_s و فرکانسِ زاویه‌ایِ نمونه برداری ω_s را یادآور می‌شویم.
همانگونه که در بالا نیز آمد، نمایش همین سیگنال نمونه برداری شده در حوزهٔ گسسته فقط با یک زیر نویس برای متغیر مربوطه که نشان دهندهٔ شماره ترتیب آن است انجام میگردد البته نحوهٔ نمایش این زیر نویس متفاوت است که ما انواع آن را آورده‌ایم ولی ما در اینجا نمایش اول را انتخاب کرده‌ایم.

$$x[k] = x(k) = x_k \triangleq x(kT_s)$$

دقت کنید که نمایش $x^*(t)$ و $x[k]$ از لحاظ مفهومی معادلند ولی یکی در حوزهٔ پیوسته و دیگری در حوزهٔ گسسته بکار میرود.

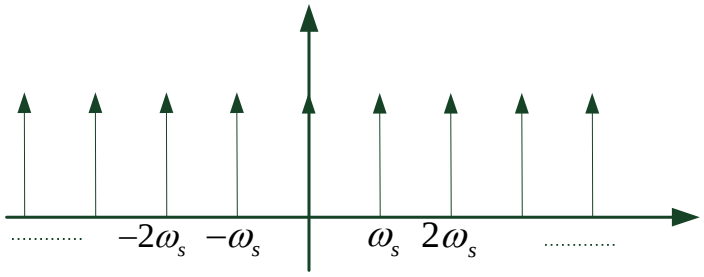
۱-۱-۲) ارتباط طیف (تبدیل فوریهٔ) سیگنال اصلی و سیگنال نمونه برداری شده

توجه کنید که چون قطار ضربه، سیگنالی متناوب است، طیفِ آن نیز قطار ضربه خواهد بود در مضارب فرکانس نمونه برداری. انرژی ضربه‌ها نیز در هر یک از این مضارب برابر ضریب سری فوریهٔ مربوط به آن مضرب فرکانسی است که در اینجا برای همه یکسان بوده و بدست میآید:

$$a_k = \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t)e^{-jk\omega_s t}dt = \frac{1}{T_s} \qquad (۲)$$

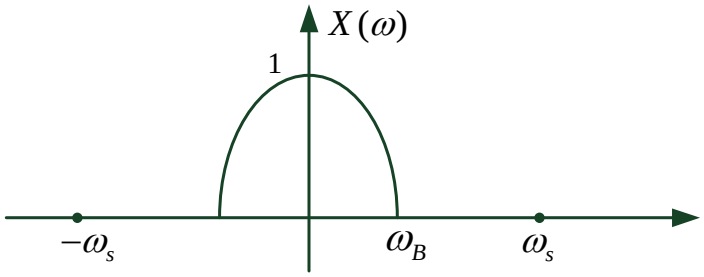
پس طیف قطار ضربه خواهد بود:

$$\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(j\omega - jk\omega_s)$$



شکل (۳)

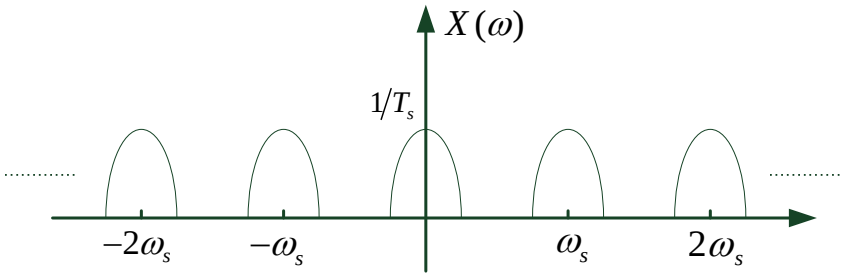
حال چنانچه پهنای باند سیگنال اصلی کوچکتر از نصب فرکانس نمونه برداری باشد، مشابه شکل زیر،



شکل (۴)

آنگاه طیف سیگنال نمونه برداری شده، از قاعدهٔ کانولوش، خواهد شد:

$$X^*(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j\omega-k\,j\omega_s) \qquad (۳)$$

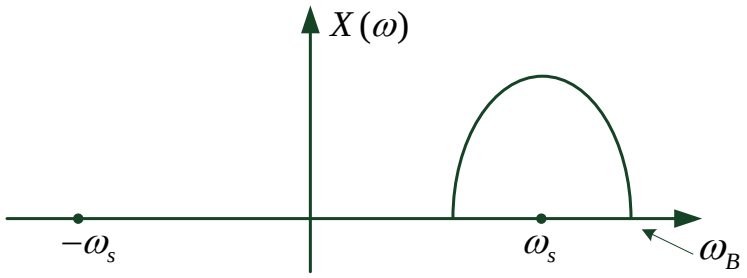


شکل (۵)

اول توجه کنید که ظاهراً اطلاعات سیگنال اصلی حفظ شده و از بین نرفته است و همان طیف اصلی را در طیف سیگنال نمونه برداری شده نیز عیناً داریم پس خوشبختانه نمونه برداری، خدشه‌ای در اطلاعات ایجاد نکرده است.

ولی در عین حال سیگنال نمونه برداری شده ظاهراً حاوی اطلاعات جدیدی است که انتظار نداشتیم و گویا همان طیف اصلی را عیناً، با انتقال به مضارب فرکانس نمونه برداری، حاضر قلمداد نموده است. به نظر شما واقعاً چرا چنین پندار ناصحیحی پس از نمونه برداری بوجود آمده است؟

این پندار، ناشی از یک حقیقت مهم است که سیستم نمونه بردار پس از نمونه برداری میخواهد به ما اعلام کند و یا بهتر بگوییم میخواهد اخطار کند که: چه بسا آنچه من به شما در فرکانس مثلا 0 نشان میدهم، اصلاً، متعلق به آن فرکانس نباشد بلکه مثلاً متعلق به فرکانس $\omega_s + 0$ باشد که چون فرکانس نمونه برداری مرا کم انتخاب کرده‌اید، آثار فراز و نشیب واقعی آنرا نمیتوانم اندازه گیری کنم و به شما اعلاک کنم و همینطور الی آخر. برای درک کیفی‌تر فرض کنید که طیف سیگنال اصلی بصورت زیر باشد:



شکل (۶)

در نتیجه، نمونه بردارِ قبلی، باز هم، همان نتیجهٔ قبلی را بدون کم و کاست بیرون میدهد و یعنی باز هم در فرکانس صفر چیزی را اعلام میکند که حال میدانیم، دور از واقعیت است. به همین دلیل برای اخطار به ما، محتاطانه همان چیزهای که دیده را در فرکانسهای مضرب نمونه برداری نیز اعلام میکند.

تمرین ۲- به نظر شما برای سیگنال بالا فرکانسِ نمونه برداری مناسبی انتخاب شده است ؟ بحث کنید.

تمرین ۳- به نظر شما اگر سیگنال از فرکانس صفر تا فرکانس 2 KHZ اطلاعات ارزشمندی داشته باشد برای از دست ندادن اطلاعات، بهتر است فرکانس نمونه برداری، چقدر انتخاب گردد ؟