پس نتیجه می‌شود:

$$h(n) = c_1 h(n-1) + c_2 h(n-2) + \cdots + c_k h(n-k) + A_1 f_1(n) + \cdots + A_r f_r(n)$$

بنابراین حکم قضیه ثابت است.

حل رابطه‌های بازگشتی همگن

رابطه‌های بازگشتی همگن حل ساده‌ای دارند که بدین صورت است: اگر $g(n) = x^n$، جواب رابطه‌ی بازگشتی همگن شماره‌ی ۱ باشد، داریم:

$$x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \cdots - c_k x^{n-k} = 0$$

یا به عبارت دیگر،

$$x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k = 0 \qquad (3)$$

است، یعنی x جواب معادله درجه k فوق است. این معادله را **معادله‌ی سرشت‌نما یا معادله‌ی مشخصه**[10] رابطه‌ی بازگشتی می‌نامیم. اگر x_i، ریشه‌ی معادله‌ی سرشت‌نما باشد، بدیهی است که $a_n = x_i^n$ یک جواب رابطه‌ی بازگشتی است و بنا بر قضیه‌ی قبلی هر ترکیب خطی از x_i^n ها هم یک جواب رابطه‌ی بازگشتی است. ضمناً این جواب‌ها پایه‌ای برای مجموعه جواب این رابطه می باشند. البته چگونگی تحقیق این مطلب به مقدماتی از جبر خطی احتیاج دارد. با اثبات این مطلب می‌توان گفت: تمام جواب‌های رابطه‌ی ۱ به‌صورت ترکیبی خطی از x_i^n ها است. (چگونگی اثبات را تحقیق کنید.) به طور مثال ترکیب خطی:

$$a_n = t_1 x_1^n + t_2 x_2^n + \cdots + t_k x_k^n; \qquad (4)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر در این رابطه‌ی بازگشتی k عنصر اول این دنباله داده شده باشند، باید k معادله‌ی زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} a_0 = t_1 + t_2 + \cdots + t_k \\ a_1 = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_k x_k \\ \vdots \\ a_{k-1} = t_1 x_1^{k-1} + t_2 x_2^{k-1} + \cdots + t_k x_k^{k-1} \end{cases}$$

این یک دستگاه k معادله و k مجهول می‌باشد. (مجهول‌ها t_1 تا t_k هستند.) با توجه به تشکیل دترمینان ضرایب، این نتیجه به‌دست می آید که اگر x_i ها متمایز باشند این دستگاه معادلات یک جواب منحصربه‌فرد دارد، یعنی بادادن k عنصر اول دنباله، می‌توان جوابی منحصربه‌فرد برای دنباله پیدا کرد. (تحقیق کنید چرادر صورت متمایز بودن x_i ها، این دستگاه معادلات یک جواب منحصربه‌فرد دارد! برای این کار باید دترمینان ماتریس ضرایب را تشکیل دهیم. می‌توانید به مرجع [?] مراجعه کنید.)

مثال ۲. دنباله‌ی فیبوناچی که در مثال (۱) تعریف شده است، را حل کنید.

حل: معادله‌ی سرشت‌نمای این رابطه به صورت $x^2 - x - 1 = 0$ است و ریشه‌های آن $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ است. پس

characteristic equation[10]

$$f_n = t_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + t_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

و با توجه به مقادیر اولیه داریم:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = f_0 = 0 \\ t_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + t_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = f_1 = 1 \end{cases}$$

و از این معادله‌ها نتیجه میشود:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, t_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad (5)$$

قابل توجه است، جمله‌ی $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ بابزرگتر شدن n بسیار کوچک می‌شود و با توجه به اینکه f_n عددی حسابی است، اگر $\langle x\rangle$ را نزدیکترین عدد صحیح به x تعریف کنیم داریم:

$$\langle x\rangle = \lfloor x + \frac{1}{2}\rfloor$$

و با این تعریف:

$$f_n = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\rangle \qquad (6)$$

در یافتن جوابهای دستگاه به دست آمده برای یافتن ضرایب، این شرط را قرار دادیم که x_iها متمایز باشند. حال اگر x_i ریشه‌ی مضاعف درجه‌ی ۲ معادله‌ی سرشت‌نما باشد، به راحتی قابل تحقیق است که $a_n = nx_i^n$ نیز یک جواب رابطه‌ی بازگشتی است (اثبات با مشتق‌گیری از معادله‌ی سرشت‌نما است، به این وسیله که ریشه‌ی مضاعف، ریشه‌ی مشتق معادله‌ی سرشت‌نما است.) به همین طریق می‌توان استدلال کرد که اگر x_i ریشه‌ی مضاعف درجه ۳ باشد، $n^2x_i^n$ نیز یک جواب رابطه‌ی بازگشتی است. در حالت کلی اگر x_i ریشه‌ی مضاعف درجه p باشد،

$$g(n) = t_0x^n + t_1nx^n + t_2n^2x^n + \cdots + t_{p-1}n^{p-1}x^n$$

جوابی برای رابطه‌ی بازگشتی است.

مثال ۳. رابطه‌ی بازگشتی زیر را حل کنید:

$$a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5a_{n-3} + 2a_{n-4} \quad (n \geq 5)$$

حل: ریشه‌های معادله سرشت‌نمای آن به صورت زیر درآید:

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow a_n = t_1(-1)^n + t_2n^2(-1)^n + t_4 2^n$$

و با معلوم بودن a_1 تا a_4 مقادیر t_1 تا t_4 به دست می‌آیند. مثلاً در حالت $a_1 = 4$ و $a_2 = -3$ و $a_3 = 22$ و $a_4 = -7$ از دستگاههای متناظر جوابهای $t_1 = -t_2 = 1$ و $-t_3 = t_4 = 2$ به دست می‌آیند.

مثال بعد، حالتی را بررسی می‌کند که در آن معادله‌ی سرشت‌نما ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۴. رابطه‌ی بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ $(a_0 = 1, a_1 = 0)$ را حل کنید.

حل: معادله‌ی سرشت‌نمای آن به صورت $x^2 - 2x + 2 = 0$ است که جواب غیر حقیقی مقابل را دارد. $(\alpha = 1 + i, \overline{\alpha} = 1 - i)$، پس داریم:

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right) \\ \overline{\alpha} = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = A\alpha^n + B\overline{\alpha}^n = \left\{(\sqrt{2})^n \left[A\left(\cos(\frac{n\pi}{4}) + i\sin(\frac{n\pi}{4})\right)\right] + \left[B\left(\cos(\frac{n\pi}{4}) - i\sin(\frac{n\pi}{4})\right)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{2}\left(C\cos(\frac{n\pi}{4}) + D\sin(\frac{n\pi}{4})\right)$$

$$a_0 = 1, a_1 = 0 \Rightarrow C = 1, D = -1$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{2}\left((\cos(\frac{n\pi}{4}) - \sin(\frac{n\pi}{4})\right)$$

لازم به تذکر است در این معادلات از رابطه‌ی مهم زیر استفاده شده است که با استفاده از استقرا ثابت می‌شود.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

۵.۷.۱ رابطه‌ها بازگشتی غیر همگن با ضرایب ثابت:

رابطه‌ی بازگشتی درجه‌ی k زیر غیر همگن است:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n)$$

اگر A_n در رابطه‌ی بازگشتی همگن ۱ صدق کند و B_n در رابطه‌ی بازگشتی غیرهمگن صدق کند آنگاه $A_n + B_n$ نیز در رابطه‌ی غیرهمگن صدق می‌کند. زیرا:

$$c_1(A_{n-1} + B_{n-1}) + \cdots + c_k(A_{n-k} + B_{n-k}) + f(n) =$$

$$(c_1 A_{n-1} + \cdots + c_k A_{n-k}) + (c_1 B_{n-1} + \cdots + c_k B_{n-k} + f(n)) = A_n + B_n$$

در این حالت A_n را جواب قسمت همگن رابطه و B_n را یک جواب خاص آن گویند. مثلاً اگر $a_n = 3a_{n-1} + 2 - 2n^2$ آنگاه $A_n = c_1 3^n$ و چون $f_n = 2 - 2n^2$، $B_n = pn^2 + qn + r$ می‌گیریم، حال داریم:

$$pn^2 + qn + r = 3(p(n-1)^2 + q(n-1) + r) + 2 - 2n^2$$

در نتیجه، برای این که این رابطه یک اتحاد برای n باشد، داریم: $D = 2, C = 2, B = 1$. در این صورت، $B_n = n^2 + 2n + 2$ و خواهیم داشت:

$$a_n = A_n + B_n = c_1 3^n + n^2 + 2$$